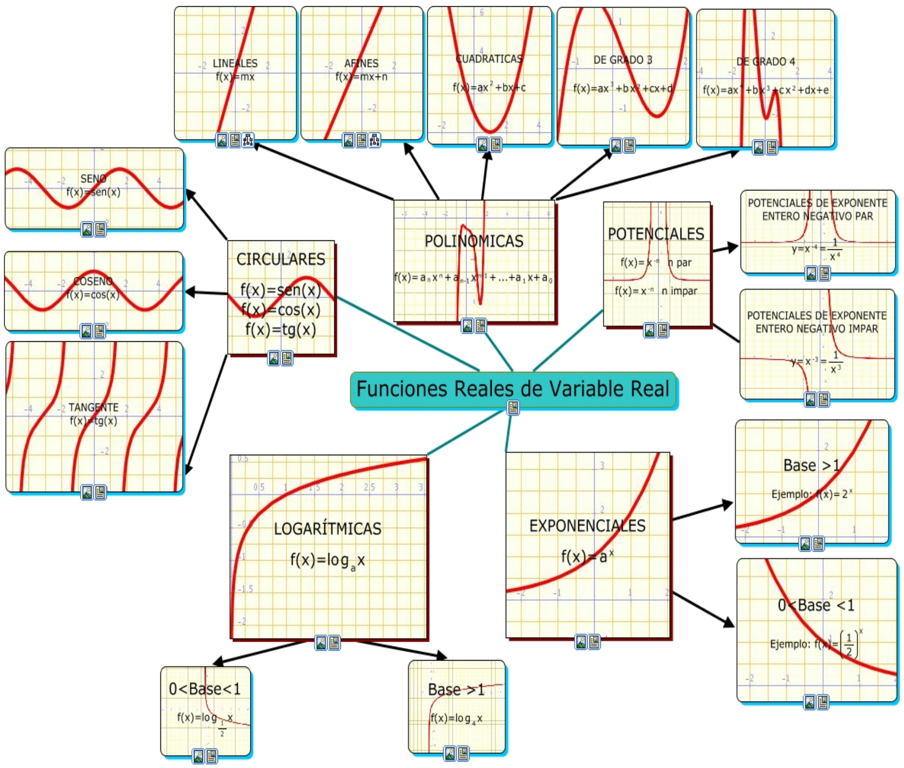
FUNTZIOEN ADIERAZPEN GRAFIKOA



Irudiaren iturriara joanez, hainbat informazio lor dezakezue irudi bakoitzaren azpian agertzen diren esteketan klikatuz.

Klikatu hemen: ↦Irudia

Edozein funtzioren adierazpen grafikoa lortzeko, nahiko era zehatz batera, funtzioaren **ezaugarri batzuk** ezagutu beharko ditugu, eta horretarako, azken urteotan hainbat tresna egon gara lantzen, ekuazioaak, inekuazioak, funtzioen aldaketak, limiteak, deribatuak, etabar…

Orain, aurreko hauen guztien erabilera zehatz bat ezagutzeko ordua heldu zaigu.

Funtzio batzuen adierazpenak lortuko ditugu, taulan agertzen diren ezaugarriak aztertzen, era ordenatuan.

.

<table>
<tr><td rowspan="10">y=f(x)

funtzioa hausnartuz lortzen diren ezaugarri orokorrak</td><td colspan="2">Definizio-eremua: D(f)

→ FUNTZIO POLINOMIKOAK : D(f)=lR
→ FUNTZIO ARRAZIONALAK : D(f)=lR-{izendatzilearen erroak}
→ FUNTZIO IRRAZIONALAK: D(f)=errokizuna-inekuazioaren ebazpen-tartea</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ibilbidea:

→ FUNTZIO POLINOMIKOAK :lR
→ Beste guztietan ez da erraz ikusten, arrazional batzuetan bai. Adibideetan ikus dezakegu</td></tr>
<tr><td colspan="2">Jarraitasuna/etendura-puntuak

→ FUNTZIO POLINOMIKOAK : Beti dira jarraituak
→ FUNTZIO ARRAZIONALAK : Izendatzilea zero egiten duten puntuetan hausnartu egin bahr da (izendatzilearen erroak, D(f)-tik kendu diren puntuetan)

→ FUNTZIO IRRAZIONALAK: D(f)=errokizuna-inekuazioaren ebazpen-tartean jarraituak dira BETI</td></tr>
<tr><td rowspan="3">SIMETRIAK

(tresna: FUNTZIOAREN ADIERAZPEN ALJEBRAIKOA)</td><td>Bikoitia: f(-x)=f(x)
OY ardatzarekiko simetria</td></tr>
<tr><td>Bakoitia: -f(-x)=f(x)

(0,0) puntuarekiko simetria (Lehenengo OX-tik tolestuz eta, gero OY-tik, edo aldrebez)</td></tr>
<tr><td>Ez dago simetriarik</td></tr>
<tr><td colspan="2">Peridikotasuna: Oso funtzio gutxi landuko ditugu perodikoak izanik. Funtzio trigonometrikoak dira ohikoak, eta aurten ez ditugu landuko</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ASINTOTAK
(tresna: LIMITEAK)</td><td>Bertikalak : x=a ,...</td></tr>
<tr><td>Horizontala: y=b</td></tr>
</table>

Zeiharra: y=mx+n

Adar parabolikoak

ASINTOTAK eta ADAR PARABOLIKOAK: Funtzio arrazionaletan $y=f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$

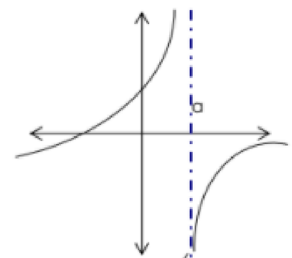
$x \longrightarrow a$

ASINTOTA BERTIKALA x = a zuzena

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ sinplifikatuta dago

Q(a)= 0, ordun, a $\notin$ D(f)

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$$



$x \longrightarrow \pm\infty$

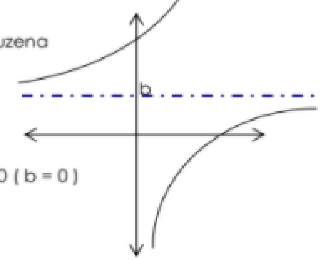
ASINTOTA HORIZONTALA y = b zuzena

- ∂ **P(x)** $<$ ∂ **Q(x)**

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \longrightarrow$$ y = 0 (b = 0)

- ∂ **P(x) =** ∂ **Q(x)**

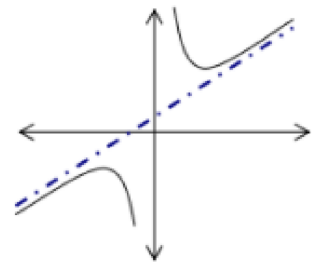
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = b \longrightarrow$$ y = b



Asintota horizontala ez badago

ASINTOTA ZEIHARRA y = mx + n zuzena

- $\partial P(x) = \partial Q(x) + 1$

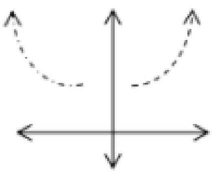


$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\pm\infty$$

Kalkulatzeko: m= $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$; n = $\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$

Asintota zeiharra ez badago

ADAR PARABOLIKOA

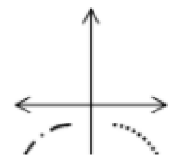


$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=+\infty$$

- $\partial P(x) - \partial Q(x) \geq 2$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=-\infty$$



GOGORATU: Guk zeiharra **zatiketa** eginez eta **ZATIDURA** hartuz, kalkulatzen genuen, errazago delako

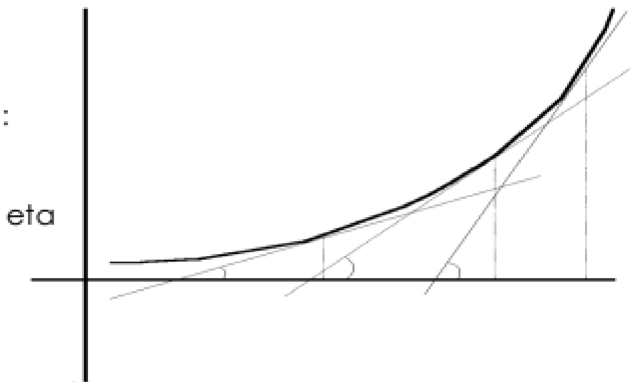
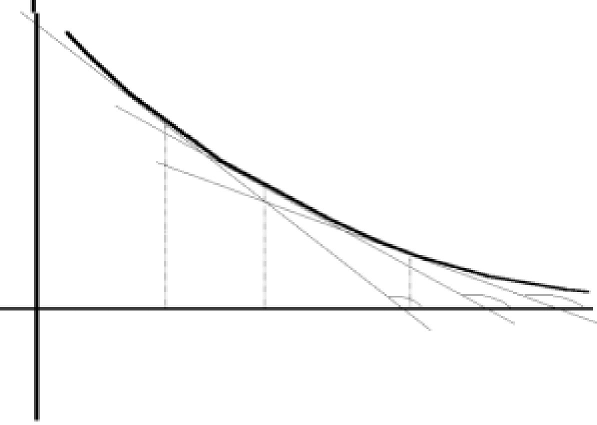
ARDATZAREKIKO EBAKETA-PUNTUAK	OX: y=0 → f(x)=0 ekuazioa ebatziz $P_1(x_1,0)$, $P_2(x_2,0)$,....
	OY: x=0 → Q(0,f(0))

<table>
<tr>
<td rowspan="2">y′=f′(x)
funtzioaren LEHENENGO DERIBATUaren bidez lortzen den informazioa

eta
y′′=f′′(x) bigarren deribatuaren bidez lortzen den informazioa</td>
<td>MONOTONIA edo HAZKUNDEA:
Gorakortasuna edota beherakorta
(tresna: DERIBATUA)</td>
<td>f′(x)>0 den tartean, funtzio GORAKORRA

f′(x)<0 den tartean, funtzio BEHERAKORRA</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Funtzio baten hazkundea:

y= f(x) funtzioa eta $x=x_o$ puntua emanda :

✗ $f'(x_o) > 0$ baldin bada, y= f(x) funtzioa eta $x=x_o$ puntuan GORAKORRA da, beraz zuzen ukitzailea gorakorra era.

✗ $f'(x_o) < 0$ baldin bada, y= f(x) funtzioa eta $x=x_o$ puntuan BEHERAKORRA da, beraz zuzen ukitzailea beherakorra era.
</td>
</tr>
</table>

PUNTU SINGULARRAK:

$f'(a)=0$

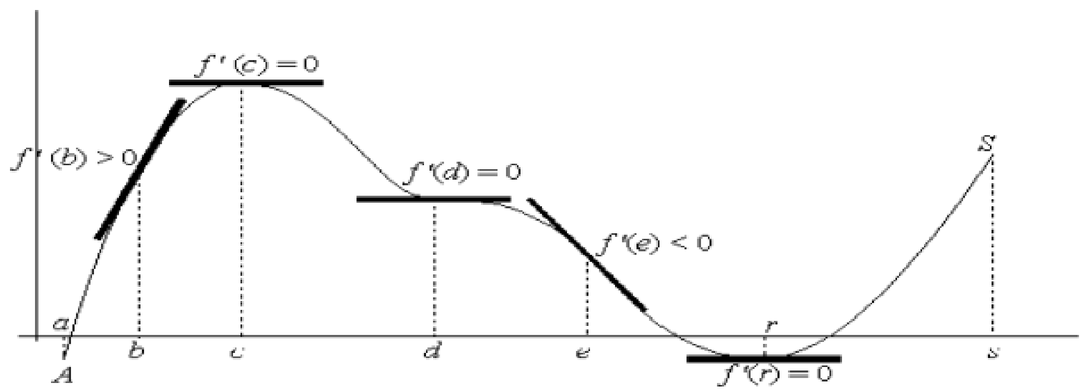
(tresna: DERIBATUA)

MAXIMOA: M(a,f(a)) ; minimoa: m(a,f(a))

f´´(a) 〈 0 bada, M(a , f(a)) maximoa da
f´´(a) 〈 0 bada, m(a , f(a)) minimoa da

Funtzio baten puntu singularrak (maximoak eta minimoak):

y= f(x) funtzioa eta $x=x_o$ puntua emanda , f´(x_o)= 0 bada, ordun $x=x_o$ puntuan funtzioak puntu singularra du:



Kurbadura: Ahurtasuna eta ganbiltasuna	$f''(x) \rangle 0$ bada, ahurra da
	$f''(x) \langle 0$ bada , ganbila da
INFLEXIO PUNTUA: $f''(a) = 0$ bada, $P(a , f(a))$ inflexio puntua da	

ADIBIDEAK

1.ADIBIDEA (funtzio polinomikoa)

Funtzioa:	***$y=x^3-3x-2$***

Ezaugarriak:	*Taulan agertzen direnak*

y=f(x) funtzioa hausnartuz lortzen diren **ezaugarri orokorrak**	Definizio-eremua:		D(f)= IR guztiak funtzio polinomikoa izateagatzik. **) Hemen, kasu honetan, ez dugu ezer egin behar, bakarrik aipatu, besterik ez*
	Ibilbidea:		IR guztiak ere arrazoi bera dela eta.
	Jarraitasuna/etendura-puntuak		Funtzio polinomikoa denez jarraitua da. (*)Gainera badakigu 3.mailako funtzio guztien "itzura" nolakoa den, "2 parabolaren zatiak lotuta"
	SIMETRIAK	Bikoitia: f(-x)=f(x) OY ardatzarekiko simetria	Konprobatuz: $f(-x)=(-x)^3-3(-x)-2=\mathbf{-}x^3\mathbf{+}3x-2\neq f(x)$ **Ez da bikoitia**
		Bakoitia: -f(-x)=f(x) (0,0) puntuarekiko simetria (Lehenengo OX-tik tolestuz eta, gero OY-tik, edo aldrebez)	Konprobatuz: $-f(-x)=-(-x^3+3x-2)=x^3-3x\mathbf{+}2\neq f(x)$ **Ez da bakoitia**

		Ez dago simetriarik	**Ez bata ez bestea. Grafikoa ez da simetrikoa**
	Peridikotasuna:		Ez da periodikoa, polinomikoen artean ez dago peridikotasunik
	ASINTOTAK	Bertikalak : x=a ,...	Kontuan hartuz asintota bertikalak D(f)-tik kenduta dauden zenbakiekin hausnartu behar dugula, **ez du asintota bertikalik**. Jarraitua delako, ez dago MOZTUTA asintota bertikal baten bidez
		Horizontala: y=b	**Ez du asintota horizontalik ere ez**. Konprobatzeko dagokion limitea kalkulatuko dugu: $\lim_{x \to +\infty} x^3 - 3x - 2 = (+\infty)^3 - 3(+\infty) - 2 = (+\infty)^3 = +\infty \quad ez\ dago$ $\lim_{x \to -\infty} x^3 - 3x - 2 = (-\infty)^3 - 3(-\infty) - 2 = (-\infty)^3 = -\infty \quad ez\ dago$
		Zeiharra: y=mx+n	**Ez dago zeiharrik ere ez. Ez dugu zatiketarik.**
		Adar parabolikoak	Kalkulatutako limiteak hartuz: $\lim_{x \to +\infty} x^3 - 3x - 2 = +\infty\ ,\ funtzioa\ \ I.koadrantean\text{"}\ desagertuko\ da$ $\lim_{x \to -\infty} x^3 - 3x - 2 = -\infty\ ,\ funtzioa\ III.koadrantean\ agertzen\ da.$
	ARDATZAREKIKO EBAKETA-PUNTUAK	OX: y=0	x^3-3x-2=0 Ruffini aplikatuz: x=-1 ; x=-1 ; x=2 Puntuak: **A(-1,0) eta B(2,0)**
		OY: x=0	x=0 ordezkatuz y=0^3-3·0-2=-2 → **C(0,-2)**

✍ Atal honekin hasi aurretik funtzioaren funtzio deribatuak kalkulatu behar dugu, prestatuta izateko:

$$f(x)=x^3-3x-2 \rightarrow f'(x)=3x^2-3 \rightarrow f''(x)=6x$$

$y'=f'(x)$ funtzioaren LEHENENGO DERIBATUaren bidez lortzen den **informazioa eta** $\mathbf{y''=f''(x)}$ bigarren deribatuaren bidez lortzen den informazioa	MONOTONIA: Gorakortasuna edota beherakortasun	$f'(x)>0$ den tartean, funtzio GORAKORRA $f'(x)<0$ den tartean, funtzio BEHERAKORRA	$\mathbf{f'(x)>0} \rightarrow \mathbf{3x^2-3}>0$ inekuazioa ebatzi behar dugu eta $\mathbf{f'(x)<0} \rightarrow \mathbf{3x^2-3}<0$ inekuazioa ere bai Aldi berean egin daitezke biak Deskonposatuko dugu: $3(x^2-1)=3(x-1)\cdot(x+1)>0$; 3 soberan dago: $(x-1)\cdot(x+1)>0$ $(-\infty,-1)$ $(-1,1)$ $(1,+\infty)$ --------|---------|--------- -1 1 x=-2 x=0 x=2 $f'(-2)=3\cdot(-2)^2-3=9>0$ gorakorra $f'(0)=3\cdot(0)^2-3=-3<0$ beherakorra $f'(2)=3\cdot(2)^2-3=9>0$ gorakorra $(-\infty,-1)$ $(-1,1)$ $(1,+\infty)$ --|------**|**-----|----**|**-----|---- **-1** **1** ⇑ ⇓ ⇑ Gorakorra: $(-\infty,-1)$ U $(1,+\infty)$

			Beherakorra: (-1,1)
	PUNTU SINGULARRAK: $f'(a)=0 \rightarrow$ **$f'(x)=0$** **$3x^2-3=0 \rightarrow 3x^2=3 \rightarrow$** **$x^2=1 \rightarrow x=\sqrt{1} = \pm 1$** **$f''(x)=6x$**	MAXIMOA: M(-1,0)	**$f''(-1)=6\cdot(-1) < 0 \rightarrow$ MAXIMOA**
		minimoa: m(1,-4)	**$f''(1)=6\cdot 1 >0 \rightarrow$ minimoa**
	INFLEXIO PUNTUA:	**$f''(x)=6x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow$** P(0,-2) inflexio puntu bat dago GANBILA: $(-\infty,0)$ AHURRA: $(0,+\infty)$	

Balioen taula (beharra ikusiz gero)

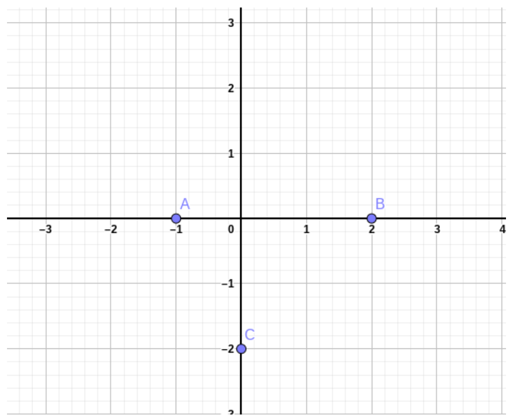
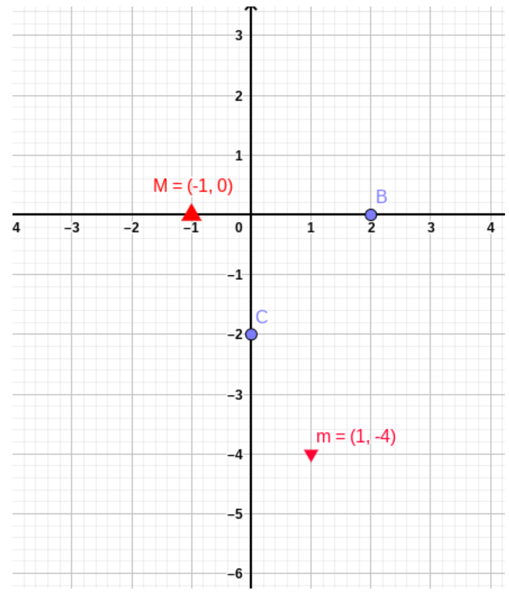
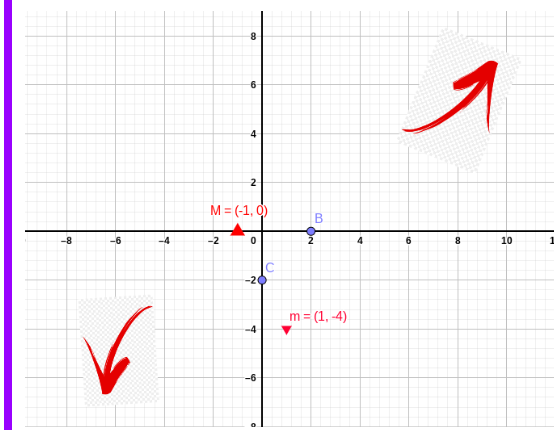
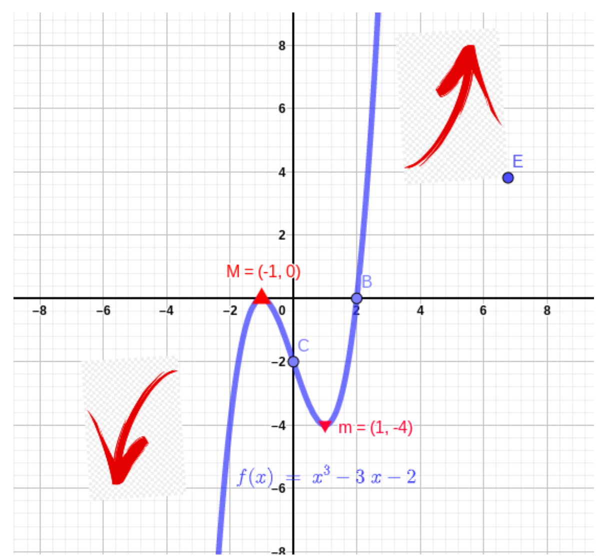
x	y
0	-2
2	0
-1	0
1	-4
3	16

Markatu zuzen honetan lortu dituzuen puntuak eta ematen duten informazioa

```
---|----------|-----------|-----------|-----------|---------
            -1          0          1            2
 ⇑       M  (OX)   ⇓(OY)      m       ⇑      (OX)
```

<table>
<tr>
<td>Grafikoa:

Geogebrako irudia :

esteka</td>
<td>*Lehenengo kokatuko ditut lortu ditudan ardatzekiko ebaketa-puntu guztiak:*
</td>
<td>*Orain puntu singularrak:.*
</td>
<td>*Adar parabolikoekin lortu dugun informazioa koadranteez.*
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>*Kontuan hartuz nolako den den 3.mailako funtzio polinomiko baten grafikoa, argi dago nola lotu lortutako infromazioa:*</td>
<td colspan="2"></td>
</tr>
</table>

2.ADIBIDEA (funtzio arrazionala)

Funtzioa:	$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$$

Ezaugarriak:	***Taulan agertzen direnak***

y=f(x) funtzioa hausnartuz lortzen diren **ezaugarri orokorrak**	Definizio-eremua: D(f)		Funtzio arrazionala denez, izendatzilea ezin da zero izan. Ordun, $x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2$ **D(f)=IR-{± 2}**
	Ibilbidea:		Prinzipioz **IR guztiak**, zaila da jakitea ekuazioa bakarrik ikusita
	Jarraitasuna/etendura-puntuak		**BI etendura-puntu daude: x=-2 eta x=2**. Puntu hauetan funtzioa apurtzen da, ez dagoelako definituta. Gero ikusiko dugu zer gertatzen den bi puntu hauetan, asintotak kalkulatzean.
	SIMETRIAK	Bikoitia: f(-x)=f(x) OY ardatzarekiko simetria	Konprobatuz: f(-x)=$\frac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=\frac{-x^3}{x^2-4}\neq f(x)$ **ez da bikoitia**
		Bakoitia: -f(-x)=f(x) (0,0) puntuarekiko simetria (Lehenengo OX-tik tolestuz eta, gero OY-tik, edo aldrebez)	Konprobatuz: -f(-x)=-$\frac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=-\frac{(-x^3)}{x^2-4}=\frac{x^3}{x^2-4}=f(x)$ **BAKOITIA DA, (0,0) punturekiko simetrikoa**
		Ez dago simetriarik	----------------------

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="2">Peridikotasuna</td><td>Ez da periodikoa, etena izanda arroroa izango zen</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ASINTOTAK</td><td>Bertikalak : x=a ,...</td><td>Kontuan izanik D(f)=IR-{± 2} bi asintota bertikal egon ahal dira: x=-2 eta x=2
baina limiteak kalkulatu behar ditugu ziurtatzeko eta, izanez gero, KOKAPENAK hausnartzeko
$\lim_{x\to 2}\frac{x^3}{x^2-4}=\frac{2^3}{2^2-4}=\frac{8}{0}=\pm\infty$
$x=2$ bada asintota bertikala
Kokapena, alboko limiteak kalkulatuz:
$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3}{x^2-4}=(x=1,9)=\frac{+}{-}=-\infty$
$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3}{x^2-4}=(x=2,1)=\frac{+}{+}=+\infty$
$\lim_{x\to -2}\frac{x^3}{x^2-4}=\frac{(-2)^3}{(-2)^2-4}=\frac{-8}{0}=\pm\infty$
$x=-2$ bada asintota bertikala
Kokapena, alboko limiteak kalkulatuz:
$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^3}{x^2-4}=(x=-2,1)=\frac{-}{+}=-\infty$
$\lim_{x\to -2^+}\frac{x^3}{x^2-4}=(x=-1,9)=\frac{-}{-}=-\infty$
$+\infty$</td></tr>
<tr><td>Horizontala: y=b</td><td>Konprobatuko dugu dagokion limitea kalkulatuz:
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\frac{(\pm\infty)^3}{(\pm\infty)^2-4}=\frac{\pm\infty}{\pm\infty}=Indeter=$
$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$</td></tr>
<tr><td>Zeiharra: y=mx+n</td><td>Badakigu dagoela ziur, zeren ● ∂ P(x) = ∂ Q(x) +1
Kalkulatzeko ZATIKETA egin behar dugu:</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="4"></td>
<td rowspan="2"></td>
<td></td>
<td>

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2-4 \\ \hline -x^3+4x & x \\ \hline \quad\ \ 4x & \end{array}$$

Ordun y=x asintota zeiharra da. Kokapena hausnartzeko.

<table>
<tr><td>x</td><td>$f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$</td><td>y=x</td></tr>
<tr><td>-10</td><td>-10,417</td><td>< -10</td></tr>
<tr><td>10</td><td>10,417</td><td>> 10</td></tr>
</table>

$x \to +\infty$, asintotaren gainetik
$x \to -\infty$, asintotaren azpitik
</td>
</tr>
<tr>
<td>Adar parabolikoak</td>
<td>Ez dago</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">ARDATZAREKIKO
EBAKETA-PUNTUAK</td>
<td>OX: y=0</td>
<td>$y=0 \to \frac{x^3}{x^2-4}=0 \to x^3=0 \to x=0 \to$ A(0,0)</td>
</tr>
<tr>
<td>OY: x=0</td>
<td>$x=0 \to y=\frac{0^3}{0^2-4}=\frac{0}{-4}=0 \to y=0 \to$ B(0,0)=A</td>
</tr>
</table>

✍ Atal honekin hasi aurretik funtzioaren funtzio deribatua kalkulatu behar dugu, prestatuta izateko:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \rightarrow f'(x) = \frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}$$

y′=f′(x) funtzioaren LEHENENGO DERIBATUaren bidez lortzen den **informazioa**

eta

y′′=f′′(x) bigarren deribatuaren bidez lortzen den informazioa

PUNTU SINGULARRAK:

f′(a)=0→ f′(x)=0

$f'(x) = \frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} = 0$

$x^4-12x^2=0 \rightarrow x^2(x^2-12)=0$

$x=0\ ;\ x=\pm\sqrt{12} = \pm\ 3,46$

MAXIMOA: M(a,f(a))
minimoa: m(a,f(a))

f´´(a) $\langle$ 0 bada, M(a , f(a)) maximoa da
f´´(a) $\langle$ 0 bada, m(a , f(a)) minimoa da

Kurbadura: Ahurtasuna eta ganbiltasuna	f´´(x) $\rangle$ 0 bada, ahurra da
	f´´(x) $\langle$ 0 bada , ganbila da
INFLEXIO PUNTUA: f´´(a) = 0 bada, P(a , f(a)) inflexio puntua da	

---|----x----|--------(|)--------|--------|--------|--------(|)--------|---x------|--------|-------

-4 **-3,46** -3 **-2** -1 **0** 1 **2** 3 **3,46** 4

⇑ **M** ⇓ asint.bert. ⇓ INFL. P. ⇓ asint.bert. ⇓ **m** ⇑

MONOTONIA:
Gorakortasuna edota beherakortasun

f′(x)>0 den tartean, funtzio GORAKORRA

Aurreko eskema ikusita:

Gorakorra:

		f'(x)<0 den tartean, funtzio BEHERAKORRA	$(-\infty,-3{,}36)$U (3,46,+∞) Beherakorra. (-3,46,-2) U (-2,2) U (2, 3,46)

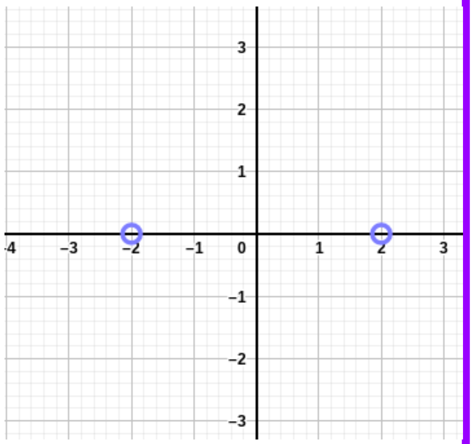
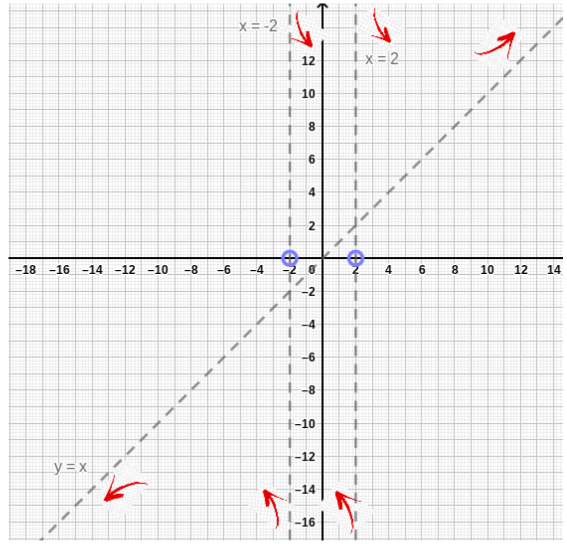
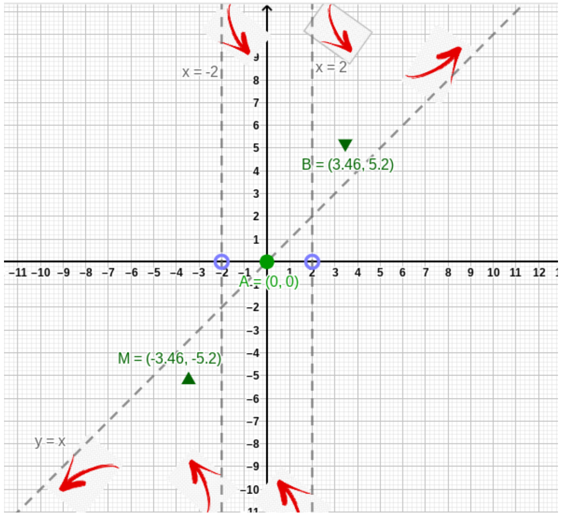
Balioen taula (beharra ikusiz gero)	

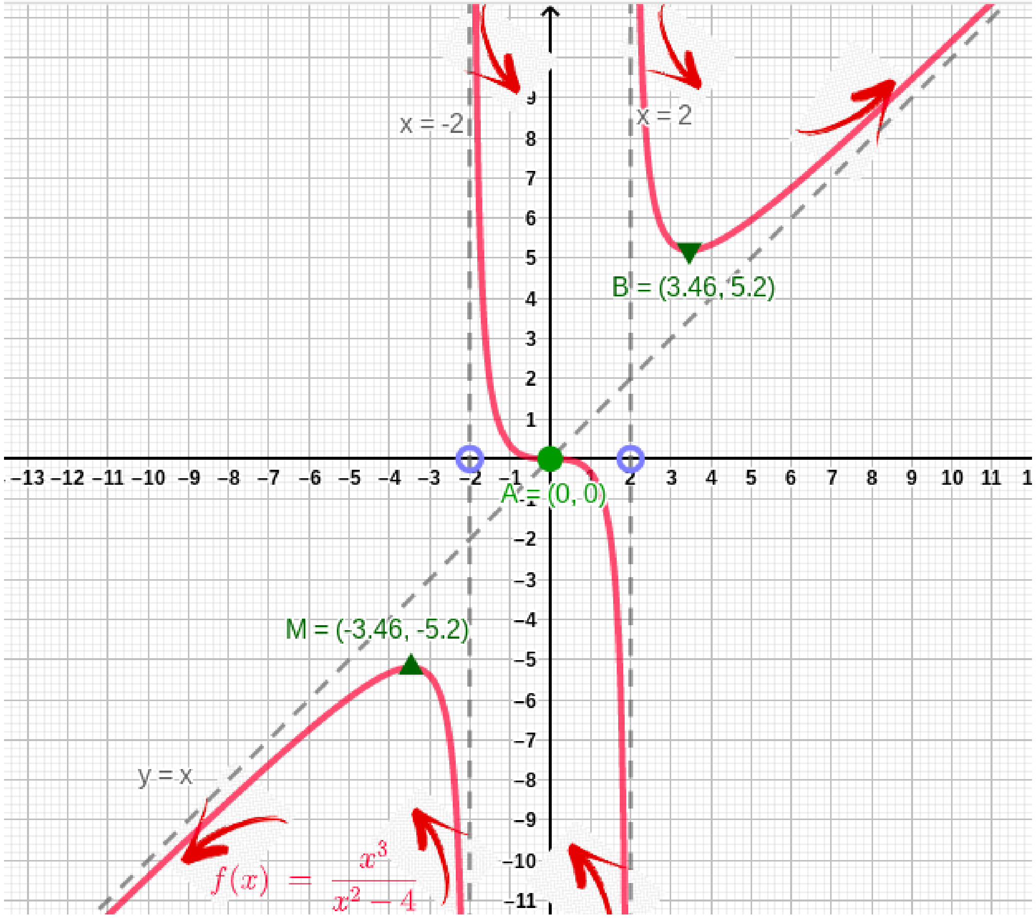
x	y
0	0
-3,46	-5,2
3,46	5,2

Markatu zuzen honetan lortu dituzuen puntuak eta ematen duten informazioa

```
---|----x----|--------(|)--------|--------|--------|--------(|)--------|---x------|--------|-------
  -4  -3,46  -3        -2        -1        0        1         2         3  3,46     4
  ⇑    M     ⇓   asint.bert.  ⇓  INFL. P.  ⇓   asint.bert.  ⇓    m    ⇑
```

Grafikoa: *Geogebrako irudia:*	*Leheneago etendura puntuak markatuko ditugu:*	*Orain BI asintota bertikala eta zeiharra irudikatuko ditugu, euren kokapenak markatuz:*	*Puntu singularrak (MAXIMOA eta minimoa kokatuko ditugu. Ardatzarekiko puntua ere (0,0) den infelexio puntua:*

[esteka]()	 *Badakigu funtzioa apurtuta dagoela. Simetria dela eta, I.koadrantean irudikatuta geratuko denak simetriko izango da III.koadrantekoarekin. Eta II.koadrantekoa, IV.koadrantekoarekin*		
	Eta argi geratzen da zelan lotu informazio osoa:		


x = -2
x = 2
B = (3.46, 5.2)
A = (0, 0)
M = (-3.46, -5.2)
y = x
$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$